2.1 Solución de ecuaciones lineales

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.
2 Reducción de términos semejantes.
3 Solución de ecuaciones lineales.
4 Solución de ecuaciones con fracciones.
5 Identificar ecuaciones condicionales, inconsistentes e identidades.
6 Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones.

1 Identificar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva

Comenzamos revisando la solución de ecuaciones lineales. Primero estudiaremos tres propiedades de las igualdades.

Propiedades de la igualdad

Para todos los números reales a, b y c:

1.	$a = a$.	Propiedad reflexiva
2.	Si $a = b$, entonces $b = a$.	Propiedad simétrica
3.	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.	Propiedad transitiva

Ejemplos de la propiedad reflexiva

$$7 = 7$$

$$x + 5 = x + 5$$

Ejemplos de la propiedad simétrica

Si $x = 3$, entonces $3 = x$.

Si $y = x + 9$, entonces $x + 9 = y$.

Ejemplos de la propiedad transitiva

Si $x = a$ y $a = 4y$, entonces $x = 4y$.

Si $a + b = c$ y $c = 4d$, entonces $a + b = 4d$.

En adelante utilizaremos con frecuencia estas propiedades sin referirnos a ellas por su nombre.

2 Reducción de términos semejantes

Cuando una ecuación algebraica se compone de diferentes partes, las partes que se suman son llamados **términos** de la expresión.

La expresión $3x^2 - 6x - 2$

puede ser escrita como: $\underbrace{3x^2}_{\text{término}} + \underbrace{(-6x)}_{\text{término}} + \underbrace{(-2)}_{\text{término}}$

tiene 3 términos.

Expresiones	Términos
$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 7$	$\frac{1}{2}x^2,\quad -3x,\quad -7$
$-5x^3 + 3x^2y - 2$	$-5x^3,\quad 3x^2y,\quad -2$
$4(x + 3) + 2x + \frac{1}{5}(x - 2) + 1$	$4(x + 3),\quad 2x,\quad \frac{1}{5}(x - 2),\quad 1$

La parte numérica de un término se denomina **coeficiente numérico** o simplemente **coeficiente**. En el término $6x^2$, el número 6 es el coeficiente numérico.

Términos	Coeficiente numérico
$x = 1 \cdot x$	1
$-a^2 = -1 \cdot a^2$	-1
$\frac{5k}{9} = \frac{5}{9}k$	$\frac{5}{9}$
$\frac{-6xyz}{7} = -\frac{6}{7} \cdot xyz$	$-\frac{6}{7}$
$8 = 8x^0$	8

Cuando un término solo consiste de un número, ese número es llamado **constante**. Por ejemplo, en la expresión $x^2 - 4$, el -4 es una constante.

El **grado de un término** con exponentes de números enteros positivos es la suma de los exponentes de la variable del término. Por ejemplo, $3x^2$ es un término de segundo grado, y $-4x$ es un término de primer grado.

Término	Grado
x^2	2
$3x = 3x^1$	1
$6 = 6x^0$	0
$4xy^5 = 4x^1y^5$	$1 + 5 = 6$
$6x^3y^5$	$3 + 5 = 8$

Comprendiendo el álgebra

Los términos semejantes son términos con la misma variable y con los mismos exponentes. En otras palabras, *los términos semejantes tienen variables idénticas*.

Los **términos semejantes** son términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Por ejemplo, $3x$ y $5x$ son términos semejantes, $2x^2$ y $-3x^2$ son términos semejantes, y $3x^2y$ y $-2x^2y$ son términos semejantes. Los términos que no se parecen se conocen como **términos no semejantes**. Todas las constantes son consideradas términos semejantes.

Simplificar una expresión significa reducir (o combinar) todos los términos semejantes de dicha expresión. Para reducir los términos semejantes podemos utilizar la propiedad distributiva.

Ejemplos de reducción de términos semejantes

$$8\boxed{x} - 2\boxed{x} = (8 - 2)\boxed{x} = 6x$$

$$3\boxed{x^2} - 5\boxed{x^2} = (3 - 5)\boxed{x^2} = -2x^2$$

$$-7\boxed{x^2y} + 3\boxed{x^2y} = (-7 + 3)\boxed{x^2y} = -4x^2y$$

Al simplificar expresiones, reacomodamos los términos usando las propiedades conmutativa y asociativa.

EJEMPLO 1 Simplifica mediante la reducción de términos semejantes.

a) $-2x + 5 + 3x - 7$ **b)** $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4$ **c)** $2x - 3y + 4 + 5x - 6y - 3$

Solución

a) $-2x + 5 + 3x - 7 = \underbrace{-2x + 3x}_{x} + \underbrace{5 - 7}_{-2}$ Coloca los términos semejantes juntos.

$= x - 2$

Esta expresión se simplifica y el resultado es $x - 2$.

b) $7x^2 - 2x^2 + 3x + 4 = 5x^2 + 3x + 4$

c) $2x - 3y + 4 + 5x - 6y - 3 = 2x + 5x - 3y - 6y + 4 - 3$ Coloca los términos semejantes juntos.

$= 7x - 9y + 1$

Resuelve ahora el ejercicio 39

EJEMPLO 2 Simplifica $-2(a + 7) - [-3(a - 1) + 8]$.

Solución

$$-2(a + 7) - [-3(a - 1) + 8] = -2(a + 7) - 1[-3(a - 1) + 8]$$
$$= -2a - 14 - 1[-3a + 3 + 8] \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$= -2a - 14 - 1[-3a + 11] \quad \text{Reducción de términos semejantes.}$$
$$= -2a - 14 + 3a - 11 \quad \text{Propiedad distributiva}$$
$$= a - 25 \quad \text{Reducción de términos semejantes.}$$

Resuelve ahora el ejercicio 55

3 Solución de ecuaciones lineales

Comprendiendo el álgebra

Todas las ecuaciones deben tener un signo de igualdad.

Ecuación

Una ***ecuación*** es una expresión matemática de igualdad. *Una ecuación debe tener un signo igual* y una expresión matemática de cada lado del signo igual.

Ejemplos de ecuaciones

$$x + 8 = -7$$
$$2x^2 - 4 = -3x + 13$$

Los números que hacen de una ecuación una expresión verdadera son denominados **solución** de la ecuación. El **conjunto solución** de una ecuación es el conjunto de números reales que hacen verdadera la ecuación.

Ecuación	Solución	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	3	$\{3\}$

Cuando dos o más ecuaciones tienen el mismo conjunto de soluciones se dice que son **ecuaciones equivalentes**. Por lo general, las ecuaciones se resuelven comenzando con una ecuación dada y produciendo una serie de ecuaciones equivalentes más simples.

Ejemplo de ecuaciones equivalentes

Ecuaciones	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	$\{3\}$
$2x = 6$	$\{3\}$
$x = 3$	$\{3\}$

En esta sección discutiremos cómo resolver **ecuaciones lineales con una variable**. Una ecuación lineal es aquella que puede escribirse en la forma $ax + b = c, a \neq 0$.

Comprendiendo el álgebra

Para resolver ecuaciones lineales, usamos las propiedades de la suma y la multiplicación de la igualdad para *aislar la variable* en un lado de la igualdad.

Propiedad de la suma para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualquier a, b y c.

La propiedad de la suma para la igualdad indica que el mismo número puede ser sumado o restado en ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución de la ecuación original.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualquier a, b y c.

La propiedad de la multiplicación para la igualdad señala que podemos multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por el mismo número sin cambiar la solución.

Cuando resolvemos una ecuación, nuestro objetivo es tener la variable completamente sola en un lado de la ecuación, es decir, *aislar la variable*.

Comprendiendo el álgebra

Cuando multiplicas ambos lados de una ecuación que tiene fracciones por el mínimo común denominador, podrás eliminar las fracciones de la ecuación.

Para resolver ecuaciones lineales

1. **Eliminar las fracciones**. Si la ecuación contiene fracciones, elimínalas multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador.
2. **Simplifica cada lado por separado**. Simplifica cada lado de la ecuación tanto como sea posible. Usa la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y reduce los términos semejantes cuando sea necesario.
3. **Aísla el término de la variable de un solo lado**. Utiliza la propiedad de la adición para acomodar todos los términos con variables de un lado de la ecuación y todos los términos constantes del otro lado. Para lograrlo quizá se requiera aplicar varias veces la propiedad de la suma.
4. **Despeja la variable**. Utiliza la propiedad de la multiplicación para obtener una ecuación que contenga solo la variable (con un coeficiente de 1) en un lado.
5. **Verifica**. Verifica la solución sustituyendo los valores obtenidos en el paso 4 en la ecuación original.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $2x + 9 = 14$.

Solución

$$2x + 9 = 14$$

$$2x + 9 \boxed{-9} = 14 \boxed{-9} \qquad \text{Resta 9 en ambos lados.}$$

$$2x = 5$$

$$\frac{\overset{1}{\cancel{2}}x}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{5}{2} \qquad \text{Divide ambos lados entre 2.}$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Verifica

$$2x + 9 = 14$$

$$\cancel{2}\left(\frac{5}{\cancel{2}}\right) + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$5 + 9 \stackrel{?}{=} 14$$

$$14 = 14 \qquad \text{Verdadero}$$

Como el valor satisface la ecuación, la solución es $\frac{5}{2}$.

Resuelve ahora el ejercicio 61

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $-2b + 8 = 3b - 7$.

Solución

$$-2b + 8 = 3b - 7$$

$$-2b \boxed{+2b} + 8 = 3b \boxed{+2b} - 7 \qquad \text{Suma } 2b \text{ en ambos lados.}$$

$$8 = 5b - 7$$

$$8 \boxed{+7} = 5b - 7 \boxed{+7} \qquad \text{Suma 7 en ambos lados.}$$

$$15 = 5b$$

$$\frac{15}{\boxed{5}} = \frac{5b}{\boxed{5}} \qquad \text{Divide ambos lados entre 5.}$$

$$3 = b$$

Resuelve ahora el ejercicio 63

El ejemplo 5 incluye números decimales. Resolveremos este problema siguiendo las instrucciones proporcionadas anteriormente. Reduce los términos semejantes de ambos lados de la ecuación antes de usar las propiedades de la suma y la multiplicación.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $4(x - 3.1) = 2.1(x - 4) + 3.5x$.

Solution

$$
\begin{aligned}
4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\
4(x) - 4(3.1) &= 2.1(x) - 2.1(4) + 3.5x && \text{Propiedad distributiva} \\
4x - 12.4 &= 2.1x - 8.4 + 3.5x \\
4x - 12.4 &= 5.6x - 8.4 && \text{Reduce los términos semejantes.} \\
4x - 12.4 + 8.4 &= 5.6x - 8.4 + 8.4 && \text{Suma 8.4 en ambos lados.} \\
4x - 4.0 &= 5.6x \\
4x - 4x - 4.0 &= 5.6x - 4x && \text{Resta } 4x \text{ en ambos lados.} \\
- 4.0 &= 1.6x \\
\frac{-4.0}{1.6} &= \frac{1.6x}{1.6} && \text{Divide ambos lados entre 1.6.} \\
-2.5 &= x
\end{aligned}
$$

La solución es -2.5.

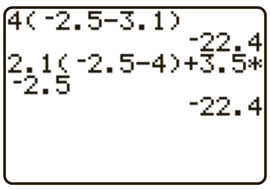
Resuelve ahora el ejercicio 111

Para ahorrar espacio, no siempre mostraremos la comprobación de las soluciones; sin embargo, deberás comprobar todas tus respuestas. Cuando la ecuación tenga números decimales, puedes usar la calculadora para corroborar la solución de la ecuación y así ahorrar un poco de tiempo.

Cómo utilizar tu calculadora

Comprobación de soluciones por sustitución

Para corroborar la solución mediante el uso de la calculadora, sustituye los valores en ambos lados de la ecuación para validar que obtienes los mismos valores. La pantalla de la calculadora graficadora en la **Figura 2.1** muestra los dos lados de la ecuación dada en el ejemplo 5: son iguales a -22.4 cuando se sustituye -2.5 por x. Por lo tanto, la solución -2.5 satisface la ecuación.



Valor del lado izquierdo de la ecuación

Valor del lado derecho de la ecuación

$$4(x - 3.1) = 2.1(x - 4) + 3.5x$$
$$4(-2.5 - 3.1) = 2.1(-2.5 - 4) + 3.5(-2.5)$$

FIGURA 2.1

Ahora trabajaremos con un ejemplo que contiene paréntesis anidados.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $7c - 15 = -2[6(c - 3) - 4(2 - c)]$.

Solución

$$
\begin{aligned}
7c - 15 &= -2[6(c - 3) - 4(2 - c)] \\
7c - 15 &= -2[6c - 18 - 8 + 4c] && \text{Propiedad distributiva} \\
7c - 15 &= -2[10c - 26] && \text{Reduce los términos semejantes.} \\
7c - 15 &= -20c + 52 && \text{Propiedad distributiva}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7c \boxed{+ 20c} - 15 &= -20c \boxed{+ 20c} + 52 && \text{Suma } 20c \text{ en ambos lados.}\\
27c - 15 &= 52\\
27c - 15 \boxed{+ 15} &= 52 \boxed{+ 15} && \text{Suma 15 en ambos lados.}\\
27c &= 67\\
\frac{27c}{\boxed{27}} &= \frac{67}{\boxed{27}} && \text{Divide ambos lados entre 27.}\\
c &= \frac{67}{27}
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 91

Al resolver las siguientes ecuaciones omitiremos algunos pasos intermedios. Ahora ilustraremos cómo se hace.

Solución

a)
$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 6\\
x + 4 \boxed{- 4} &= 6 \boxed{- 4} \quad \longleftarrow \text{Realiza mentalmente este paso.}\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
3x &= 6\\
\frac{3x}{\boxed{3}} &= \frac{6}{\boxed{3}} \quad \longleftarrow \text{Realiza mentalmente este paso.}\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Solución abreviada

a)
$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 6\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
3x &= 6\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

4 Solución de ecuaciones con fracciones

Cuando una ecuación contiene fracciones, empezamos multiplicando *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador.

Mínimo común denominador

El **mínimo común denominador** (MCD) de un conjunto de denominadores es el número más pequeño que ambos denominadores pueden dividir sin dejar como resultado un residuo.

Por ejemplo, si el denominador de dos fracciones son 4 y 6, entonces 12 es el mínimo común denominador, ya que es el número más pequeño que los denominadores 4 y 6 pueden dividir sin dejar un residuo como resultado.

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $5 - \frac{2a}{3} = -9$.

Solución El mínimo común denominador es 3. Multiplica ambos lados de la ecuación por 3, después usa la propiedad distributiva del lado izquierdo de la igualdad. *Este proceso eliminará todas las fracciones de la ecuación.*

$$
\begin{aligned}
5 - \frac{2a}{3} &= -9\\
\boxed{3}\left(5 - \frac{2a}{3}\right) &= \boxed{3}(-9) && \text{Multiplica ambos lados por 3.}\\
3(5) - \overset{1}{\cancel{3}}\left(\frac{2a}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right) &= -27 && \text{Propiedad distributiva}\\
15 - 2a &= -27\\
15 \boxed{- 15} - 2a &= -27 \boxed{- 15} && \text{Resta 15 en ambos lados.}\\
-2a &= -42\\
\frac{-2a}{\boxed{-2}} &= \frac{-42}{\boxed{-2}} && \text{Divide ambos lados entre } -2.\\
a &= 21
\end{aligned}
$$

Resuelve ahora el ejercicio 97

Comprendiendo el álgebra

Después de multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, la ecuación no deberá contener ninguna fracción.

EJEMPLO 8 Resuelve la ecuación $\frac{1}{2}(x+4) = \frac{1}{3}x$.

Solución Empieza multiplicando ambos lados de la igualdad por 6, el MCD de 2 y 3.

$$6\left[\frac{1}{2}(x+4)\right] = 6\left(\frac{1}{3}x\right)$$ Multiplica ambos lados por 6.

$$3(x+4) = 2x$$ Simplifica.

$$3x + 12 = 2x$$ Propiedad distributiva.

$$3x - 2x + 12 = 2x - 2x$$ Resta $2x$ en ambos lados.

$$x + 12 = 0$$

$$x + 12 - 12 = 0 - 12$$ Resta 12 en ambos lados.

$$x = -12$$

Resuelve ahora el ejercicio 99

En la sección 6.4 estudiaremos ecuaciones que contienen fracciones.

5 Identificar ecuaciones condicionales, contradicciones e identidades

Todas las ecuaciones estudiadas hasta el momento han sido verdaderas sólo para un valor de la variable, estas ecuaciones se denominan **ecuaciones condicionales**. Las ecuaciones que nunca son verdaderas y no tienen solución son llamadas **contradicciones**. Otras ecuaciones, denominadas **identidades,** son siempre verdaderas y tiene un número infinito de soluciones. La **Tabla 2.1** resume estos tipos de ecuaciones lineales y su correspondiente número de soluciones.

TABLA 2.1

Tipo de ecuación lineal	**Número de soluciones**
Ecuación condicional	Una
Contradicción	Ninguna (conjunto solución: $\emptyset$)
Identidad	Número infinito (conjunto solución: $\mathbb{R}$)

El conjunto solución de una ecuación condicional tiene la solución dada en un conjunto entre llaves. Por ejemplo, el conjunto solución del ejemplo 8 es $\{-12\}$. El conjunto solución de una contradicción es el conjunto vacío o nulo identificado por $\{\ \}$ o $\emptyset$. El conjunto solución de una identidad es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 9 Determina si la ecuación $5(a-3) - 3(a-6) = 2(a+1) + 1$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Encuentra el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$5(a-3) - 3(a-6) = 2(a+1) + 1$$

$$5a - 15 - 3a + 18 = 2a + 2 + 1$$ Propiedad distributiva

$$2a + 3 = 2a + 3$$ Reduce los términos.

A partir de que obtenemos la misma expresión en ambos lados de la ecuación, se determina que es una identidad. Esta ecuación es verdadera para todos los números reales. El conjunto solución es $\mathbb{R}$.

Resuelve ahora el ejercicio 125

En el ejemplo 9, si se hubiera resuelto la ecuación restando $2a$ en ambos lados de la igualdad, se habría obtenido la ecuación $3 = 3$. Esta ecuación además de ser una identidad, indica que el conjunto solución es $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 10 Determina si $2(3m + 1) = 6m + 3$ es una ecuación condicional, una contradicción o una identidad. Encuentra el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$\begin{aligned} 2(3m+1) &= 6m+3 \\ 6m+2 &= 6m+3 && \text{Propiedad distributiva} \\ 6m - 6m + 2 &= 6m - 6m + 3 && \text{Resta } 6m \text{ en ambos lados.} \\ 2 &= 3 \end{aligned}$$

Como $2 = 3$ nunca es una proposición verdadera, la ecuación es una contradicción, el conjunto solución es $\emptyset$.

Resuelve ahora el ejercicio 119

Comprendiendo el álgebra

Si al resolver una ecuación la solución no contiene variables, entonces la ecuación original es o una identidad o una contradicción. Por ejemplo, $3 = 3$ es una identidad y significa que el conjunto solución es $\mathbb{R}$; $2 = 3$ es una contradicción y significa que el conjunto solución es $\emptyset$.

6 Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones

Los números o variables que aparecen en la ecuación no afectan los procedimientos para resolver las ecuaciones. En el siguiente ejemplo resolveremos la ecuación usando los conceptos y procedimientos hasta ahora mostrados.

EJEMPLO 11 En la siguiente ecuación, supón que $\odot$ representa la variable que resolveremos y el resto de los símbolos representan números reales diferentes de cero. Resuelve la ecuación para $\odot$.

$$\square\odot + \triangle = \#$$

Solución Para despejar $\odot$ necesitamos aislarla. Para lo cual usaremos las propiedades de la suma y la multiplicación.

$$\begin{aligned} \square\odot + \triangle &= \# \\ \square\odot + \triangle - \triangle &= \# - \triangle && \text{Resta } \triangle \text{ en ambos lados.} \\ \square\odot &= \# - \triangle \\ \frac{\square\odot}{\square} &= \frac{\# - \triangle}{\square} && \text{Divide ambos lados entre } \square. \\ \odot &= \frac{\# - \triangle}{\square} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es $\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$.

Resuelve ahora el ejercicio 133

Considera la ecuación $5x + 7 = 12$. Si hacemos que $5 = \square$, $x = \odot$, $7 = \triangle$ y $12 = \#$, la ecuación tiene la misma forma que la ecuación del ejemplo 11. Por lo tanto, la solución será de la misma forma.

Ecuación	Solución
$\square\odot + \triangle = \#$	$\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$
$5x + 7 = 12$	$x = \dfrac{12 - 7}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

Si resuelves la ecuación $5x + 7 = 12$ te darás cuenta de que la solución es 1.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.1

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

condicional	$\varnothing$	términos semejantes	identidad	mínimo común denominador	$\mathbb{R}$
términos	contradicción	grado	términos no semejantes	aislar	

1. Las partes que se suman en una expresión algebraica son llamadas _______________ de la expresión.
2. Los términos que tienen partes variables idénticas se llaman _______________.
3. El objetivo de resolver ecuaciones es _______________ la variable en uno de los lados de la ecuación.
4. Podemos eliminar fracciones en una ecuación multiplicando ambos lados de la ecuación por el _______________.
5. Una ecuación que siempre se satisface se conoce como _______________.
6. Una ecuación que se satisface solo para valores específicos de las variables es conocida como una ecuación _______________.
7. Una ecuación que nunca se satisface se conoce como _______________.
8. El _______________ de un término es la suma de los exponentes de los factores en el término.
9. El símbolo _______________ se usa para indicar que la solución establece una contradicción.
10. El símbolo _______________ se usa para indicar que la solución establece una identidad.

Practica tus habilidades

Indica para cada expresión su propiedad correspondiente.

11. Si $x = 13$, entonces $13 = x$.

12. Si $m + 2 = 3$, entonces $3 = m + 2$.

13. Si $b = c$ y $c = 9$, entonces $b = 9$.

14. Si $x + 1 = a$ y $a = 2y$, entonces $x + 1 = 2y$.

15. $a + c = a + c$

16. Si $r = 4$, entonces $r + 3 = 4 + 3$.

17. Si $x = 8$, entonces $x - 8 = 8 - 8$.

18. Si $2x = 4$, entonces $3(2x) = 3(4)$.

19. Si $5x = 4$, entonces $\frac{1}{5}(5x) = \frac{1}{5}(4)$.

20. Si $a + 2 = 4$, entonces $a + 2 - 2 = 4 - 2$.

21. Si $\frac{t}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, entonces $12\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{5}{6}\right)$.

22. Si $x - 3 = x + y$ y $x + y = z$, entonces $x - 3 = z$.

23. Si $x + 3 = 7$, entonces $x = 4$.

24. Si $5x = 35$, entonces $x = 7$.

Encuentra el grado de los siguientes términos.

25. $5y$ **26.** $-2z$ **27.** $5c^3$ **28.** $-6y^2$

29. $3ab$ **30.** $\frac{1}{2}x^4y$ **31.** 6 **32.** -3

33. $-5r$ **34.** $18p^2q^3$ **35.** $5a^2b^4c$ **36.** m^4n^6

37. $3x^5y^6z$ **38.** $-2x^4y^7z^8$

Simplifica las siguientes expresiones. Si alguna no puede ser simplificada, especifícalo.

39. $7r + 3b - 11x + 12y$ **40.** $3x^2 + 4x + 5$ **41.** $-2x^2 - 5x + 7x - 3$

42. $2a^2 - 4ab + 5ab - 10b^2$ **43.** $10.6c^2 - 2.3c + 5.9c - 1.9c^2$ **44.** $7y + 3x - 7 + 5x - 2y$

45. $w^3 + w^2 - w + 1$ **46.** $b + b^2 - 4b + b^2 + 3b$ **47.** $8pq - 9pq + p + q$

48. $7x^3y^2 + 11y^3x^2$ **49.** $12\left(\frac{1}{6} + \frac{d}{4}\right) + 5d$ **50.** $4.3 - 3.2x - 2(x - 2)$

51. $3\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}x + 5$

52. $6n + 0.6(n - 3) - 5(n + 0.7)$

53. $4 - [6(3x + 2) - x] + 4$

54. $3(a + c) - 4(a + c) - 3$

55. $9x - [3x - (5x - 4y)] - 2y$

56. $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + y$

57. $5b - \{7[2(3b - 2) - (4b + 9)] - 2\}$

58. $2\{[3a - (2b - 5a)] - 3(2a - b)\}$

59. $-\{[2rs - 3(r + 2s)] - 2(2r^2 - s)\}$

60. $p^2q + 4pq - [-(pq + 4p^2q) + pq]$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

61. $5a - 1 = 14$ **62.** $7x - 6 - 5x = -8$ **63.** $4x - 5 = 2(x + 5)$

64. $5s - 3 = 2s + 6$ **65.** $4x - 8 = -4(2x - 3) + 4$ **66.** $8w + 7 = -3w - 15$

67. $-6(z - 1) = -5(z + 2)$ **68.** $7(x - 1) = 3(x + 2)$ **69.** $-3(t - 5) = 2(t - 5)$

70. $4(2x - 4) = -2(x + 3)$
71. $3x + 4(2 - x) = 4x + 5$
72. $6(3 - q) = -4(q + 1)$
73. $2 - (x + 5) = 4x - 8$
74. $4x - 2(3x - 7) = 2x - 6$
75. $p - (p + 4) = 4(p - 1) + 2p$
76. $8x + 2(x - 4) = 8x + 12$
77. $-3(y - 1) + 2y = 4(y - 3)$
78. $5r - 13 - 6r = 3(r + 5) - 16$
79. $6 - (n + 3) = 3n + 5 - 2n$
80. $8 - 3(2a - 4) = 5 + 3a - 4a$
81. $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$
82. $-2(3w + 6) - (4w - 3) = 21$
83. $-4(3 - 4x) - 2(x - 1) = 12x$
84. $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$
85. $5(a + 3) - a = -(4a - 6) + 1$
86. $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$
87. $5(x - 2) - 14x = x - 5$
88. $3[6 - (h + 2)] - 6 = 4(-h + 7)$
89. $2[3x - (4x - 6)] = 5(x - 6)$
90. $-z - 6z + 3 = 4 - [6 - z - (3 - 2z)]$
91. $4\{2 - [3(c + 1) - 2(c + 1)]\} = -2c$
92. $3\{[(x - 2) + 4x] - (x - 3)\} = 4 - (x - 12)$
93. $-\{4(d + 3) - 5[3d - 2(2d + 7)] - 8\} = -10d - 6$
94. $-3(6 - 4x) = 4 - \{5x - [6x - (4x - (3x + 2))]\}$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Si no es un valor entero, expresa tu respuesta como fracción.

95. $\frac{d}{5} = -7$
96. $\frac{7m + 9}{6} = 5$
97. $\frac{4x - 2}{3} = -6$
98. $\frac{1}{2}(6r - 10) = 7$
99. $\frac{3}{4}t + \frac{7}{8}t = 39$
100. $\frac{1}{4}(x - 2) = \frac{1}{3}(2x + 6)$
101. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x + 2)$
102. $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{8}x - 1$
103. $4 - \frac{3}{4}a = 7$
104. $x - 2 = \frac{3}{4}(x + 4)$
105. $\frac{1}{2} = \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}$
106. $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = 2x$
107. $\frac{1}{4}(x + 3) = \frac{1}{3}(x - 2) + 1$
108. $\frac{5}{6}m - \frac{5}{12} = \frac{7}{8}m + \frac{2}{3}$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Redondea las respuestas a la centésima más cercana.

109. $0.4n + 4.7 = 5.1n$
110. $0.2(x - 30) = 1.6x$
111. $4.7x - 3.6(x - 1) = 4.9$
112. $6.1p - 4.5(3 - 2p) = 15.7$
113. $5(z + 3.41) = -7.89(2z - 4) - 5.67$
114. $0.05(2000 + 2x) = 0.04(2500 - 6x)$
115. $0.6(500 - 2.4x) = 3.6(2x - 4000)$
116. $0.42x - x = 5.1(x + 3)$
117. $1000(7.34q + 14.78) = 100(3.91 - 4.21q)$
118. $0.6(14x - 8000) = -0.4(20x + 12{,}000) + 20.6x$

Encuentra la solución para cada ejercicio. Luego indica si la ecuación es una condicional, una identidad o una contradicción.

119. $3(y + 3) - 4(2y - 7) = -5y + 2$
120. $7x + 5 - 5(x - 3) = 5(x + 4) - 3x$
121. $7 + 3(x - 2) + 8x = 6(x + 1) + 2x - 9$
122. $-5(c + 3) + 4(c - 2) = 2(c + 2)$
123. $4 - \left(\frac{2}{3}x + 2\right) = 2\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$
124. $7 - \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 3\left(-\frac{1}{6}x + 2\right)$
125. $6\ x - 1) = -3(2 - x) + 3x$
126. $0.6(z + 5) - 0.5(z + 2) = 0.1(z - 23)$
127. $0.8z - 0.3(z + 10) = 0.5(z + 1)$
128. $4(2 - 3x) = -[6x - (8 - 6x)]$

Resolución de problemas

129. Densidad de población La densidad de la población de Estados Unidos se ha incrementado constantemente desde el año 2000. La densidad de población de Estados Unidos puede ser estimada usando la ecuación

$$P = 0.82t + 78.5$$

donde P es la densidad de población, medida en número de personas por milla cuadrada, y t es el número de años desde 2000. Usa $t = 1$ para 2001, $t = 2$ para 2002 y así sucesivamente. Si la densidad de población continúa aumentando a la tasa actual,

a) determina la densidad de población de Estados Unidos en 2008.

b) ¿en qué año la densidad de la población de Estados Unidos alcanzará 100 personas por milla cuadrada?

130. Bebés durmiendo El Dr. Richard Ferber, un pediatra experto en sueño, ha desarrollado un método* para ayudar a niños con 6 meses de edad o mayores a dormir durante la noche. El a menudo llamado "Ferberizante" invita a los padres a esperar por periodos cada vez más largos antes de entrar al cuarto del niño a consolarle el llanto. El tiempo sugerido depende de

*Antes de intentar este método, los padres lo deben consultar con su pediatra.

cuantas noches los padres han estado usando el método: para calcularlo, se utiliza la siguiente ecuación

$$W = 5n + 5$$

donde W es el tiempo de espera en minutos y n es el número de noches. Por ejemplo, en la primera noche, $n = 1$, en la segunda noche, $n = 2$, y así sucesivamente.

a) ¿Cuánto tiempo deben los padres esperar durante la primera noche?

b) ¿Cuánto tiempo deben los padres esperar durante la cuarta noche?

c) ¿En qué noche los padres deben esperar 30 minutos?

d) ¿En qué noche los padres deben esperar 40 minutos?

© Allen R. Angel

131. Costos que se incrementan por el cuidado de la salud Se proyecta que el gasto por el cuidado de la salud en Estados Unidos crece de acuerdo con la siguiente ecuación $C = 0.2x + 2.8$, donde C representa la cantidad total gastada en materia de salud en unidades de trillones de dólares y x representa los años transcurridos desde 2008. Usa $x = 1$ para 2009, $x = 2$ para 2010 y así sucesivamente.

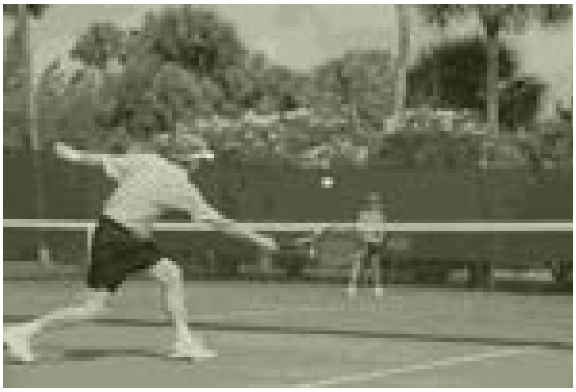
Fuente: Coalición Nacional por el Cuidado de la Salud

a) ¿Cuánto se gastó en materia de salud en Estados Unidos en 2009?

b) ¿Si esta tendencia continua, en qué año el gasto en materia de salud alcanzará los 4 trillones?

132. Envejecimiento de la población Se estima que el porcentaje de la población americana que es mayor de 65 años crezca de acuerdo con la siguiente ecuación $P = 1.5x + 38.7$. En donde P representa el porcentaje de la población americana mayor de 65 años y x representa los años transcurridos desde 2008. Usa $x = 1$ para 2009, $x = 2$ para 2010 y así sucesivamente.

Fuente: Academia Nacional de Ciencias



© Christian Wheatley\Shutterstock

a) ¿Cuál es el porcentaje de americanos mayores de 65 años en 2009?

b) ¿En qué año se estima que el porcentaje de americanos mayores de 65 años alcanzará el 50%?

Resuelve cada ecuación para el símbolo dado. Asume que el símbolo que estás resolviendo representa la variable y que los demás símbolos representan números reales diferentes de cero. Ver el Ejemplo 11.

133. Resuelve $*\triangle - \square = \odot$ para $\triangle$.

134. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\triangle$.

135. Resuelve $\odot\square + \triangle = \otimes$ para $\odot$.

136. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\square$.

2.2 Solución de problemas y uso de fórmulas

1 Uso del procedimiento para la solución de problemas.

2 Despejar una variable de una ecuación o fórmula.

1 Uso del procedimiento para la solución de problemas

Una de las razones principales para estudiar matemáticas es que las podemos utilizar para resolver problemas de la vida diaria. Para resolver la mayoría de los problemas de aplicación matemática, necesitamos ser capaces de representar el problema mediante símbolos matemáticos usando expresiones o ecuaciones, y cuando lo hacemos, creamos un **modelo matemático** de la situación.

En esta sección, presentamos el procedimiento para la resolución de problemas y analizamos fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que representa el modelo matemático de una situación de la vida real. A lo largo del libro resolveremos problemas, en donde determinaremos una ecuación o una fórmula que representen o modelen situaciones de la vida cotidiana.

Puedes abordar cualquier problema usando el procedimiento de solución de problemas de cinco pasos desarrollado por George Pólya, presentado en su libro *How to Solve it*.

Guía para la resolución de problemas

1. **Entiende el problema.**
   - Lee el problema **con detenimiento** al menos dos veces. En la primera lectura obtén una visión general del problema. En la segunda lectura, determina (a) exactamente lo que se te pide calcular y (b) qué información proporciona el problema.
   - De ser posible, has un bosquejo para ilustrar el problema. Etiqueta la información obtenida.
   - Anota en forma de lista la información que te pueda ayudar en la solución del problema.
2. **Traduce el problema a lenguaje matemático**.
   - A menudo esto implicará expresar el problema de manera algebraica.
   - En algunas ocasiones esto implicará utilizar una fórmula en particular, mientras que en otras debes generar tu propia ecuación. Puede ser necesario que consultes otras fuentes para el uso apropiado de las fórmulas.
3. **Lleva a cabo los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema**.
4. **Verifica la respuesta obtenida en el paso 3**.
   - Pregúntate: "¿Tiene sentido la respuesta?", "¿La respuesta es razonable?" Si la respuesta no lo es, verifica nuevamente tu método para la solución del problema y tus cálculos.
   - De ser posible verifica la solución en el problema original.
5. **Responde la pregunta**. Asegúrate de haber respondido la pregunta. Establece las respuestas con claridad.

En los siguientes ejemplos se muestra cómo aplicar la guía para la resolución de problemas. Cuando sea necesario proporcionaremos los pasos en los ejemplos para ilustrar el método de los cinco pasos.

Como se indicó en el paso dos de la guía para la resolución de problemas –*traduce el problema a lenguaje matemático*–, en algunas ocasionas necesitaremos encontrar y usar una *fórmula*. En esta sección te mostraremos cómo hacerlo.

EJEMPLO 1 **Préstamo personal** Diane Basile hace un préstamo personal por \$5000 con un interés simple de 4% a su hermano, Bob Basile, por un periodo de 5 años.

a) Al término de 5 años, ¿qué interés le pagará Bob a Diane?

b) Cuando Bob pague su deuda transcurridos 5 años, ¿cuánto dinero, en total, debe pagar a Diane?

Solución **a)** Entiende Cuando una persona obtiene un préstamo con interés simple, ésta deberá pagar tanto el interés como el capital (la cantidad original que le fue prestada) a la fecha de vencimiento del préstamo. En este caso, el interés simple tiene una tasa de 4% y el préstamo es por 5 años.

Traduce La **fórmula de interés simple** es:

$$\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo} \quad \text{o} \quad i = prt$$

Donde i = interés simple

p = capital

r = tasa de interés escrito en forma decimal

t = tiempo

Observa que la tasa y el tiempo se representan en las mismas unidades de tiempo. Regularmente usaremos años. En este problema $p = \$5000$, $r = 0.04$ y $t = 5$. Obtendremos el interés simple, i, substituyendo estos valores en la fórmula de interés simple.

$$i = ptr$$

Realiza los cálculos

$$= 5000(0.04)(5)$$

$$= 1000$$

Verifica La respuesta parece razonable, ya que Bob pagará \$1000 por el uso de \$5000 por 5 años.

Responde El interés simple generado es \$1000.

b) Bob debe pagar el capital que le prestaron, \$5000, más el interés determinado en el inciso **a)** \$1000. Por lo tanto, cuando Bob salde su deuda deberá pagarle a Diane \$6000.

Resuelve ahora el ejercicio 67

EJEMPLO 2 **Certificado de depósito** Pola Sommers recibe un bono de vacaciones por \$ 1350 e invierte el dinero en un certificado de depósito (CD) a una tasa de interés anual de 3.6% compuesto de forma mensual por 18 meses.

a) ¿Qué valor tendrá el CD después de 18 meses?

b) ¿Cuánto ganará de interés durante los 18 meses?

Solución **a)** Entiende El **interés compuesto** significa que obtienes intereses de tu inversión por un periodo de tiempo. Entonces, en el siguiente periodo obtendrás el interés sobre la inversión, más el interés sobre el interés que se pagó en el primer periodo. Este proceso continúa para cada periodo.

Traduce La **fórmula de interés compuesto** es:

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A = la cantidad acumulada, o el balance, en la cuenta

p = el capital, o la inversión inicial

r = la tasa de interés expresada en forma decimal

n = el número de veces por año que el interés es compuesto

t = tiempo medido en años

En este problema, tenemos que $p = \$1350$, $r = 3.6\%$, $n = 12$ (considerando que un año tiene 12 meses), y $t = 1.5 \left(18 \text{ meses } = \frac{18}{12} = 1.5 \text{ años}\right)$. Sustituye estos valores en la fórmula y realiza los cálculos.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} &= 1350\left(1 + \frac{.036}{12}\right)^{12(1.5)} \\ &= 1350(1 + 0.003)^{18} \\ &= 1350(1.003)^{18} \\ &\approx 1350(1.05539928) && \text{Realizado en una calculadora} \\ &\approx 1424.79 && \text{Redondeado al centavo más cercano} \end{aligned}$$

Verifica La respuesta $1424.79 es razonable, ya que es más de lo que Pola invirtió originalmente.

Responde El CD de Pola tendrá un valor de $1424.79 al final de los 18 meses.

b) **Entiende** El interés será la diferencia entre la cantidad original invertida y el valor del certificado de depósito al final de los 18 meses.

Traduce

$$\text{interés} = \left(\begin{array}{c}\text{valor del certificado de} \\ \text{depósito después de 18 meses}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{monto invertido} \\ \text{originalmente}\end{array}\right)$$

Realiza los cálculos $= 1424.79 - 1350 = 74.79$

Verifica El monto del interés es razonable y la aritmética es fácil de verificar.

Responde El interés ganado en el periodo de 18 meses será $74.79.

Resuelve ahora el ejercicio 77.

El siguiente ejemplo involucra una fórmula que contiene subíndices. Los **subíndices** son números (u otras variables) localizados debajo y a la derecha de las variables. Por ejemplo, si una fórmula contiene la velocidad original y final, ambas velocidades son simbolizadas como V_0 y V_f, respectivamente. Los subíndices se leen usando el sufijo "sub". Por ejemplo V_f se lee "V subíndice f" y x_2 se lee como "x subíndice 2".

EJEMPLO 3 **Comparación de inversiones** Sharon Griggs se encuentra en el rango de ingresos con impuestos federales de 25%, y aún no decide si invertir en bonos municipales libres de impuestos con una tasa de interés de 2.24% o en certificados de depósito gravables con una tasa de 3.70%.

a) Determina la tasa de interés gravable equivalente a 2.24% libre de impuestos para Sharon.

b) Si ambas inversiones fueran por el mismo periodo, ¿cuál proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento?

Solución **a)** **Entiende** Algunos de los intereses que recibimos, como los bonos municipales, son libres de impuestos. Otros intereses que recibimos, como cuentas de ahorro o certificados de depósito, son gravables en nuestros impuestos. Pagar impuestos sobre el interés tiene el efecto de reducir la cantidad de dinero que en realidad obtenemos de los intereses. Necesitamos determinar la tasa de interés gravable que es equivalente a 2.24% libre de impuestos para Sharon, quien se encuentra en el rango de ingresos con tasa de impuestos de 25%.

Traduce La fórmula utilizada para comparar tasas de interés gravable y tasas de interés libre de impuestos es

$$T_f = T_a(1 + F)$$

donde T_f es la tasa libre de impuestos, T_a es la tasa de interés gravable y F es el rango de ingresos con tasa de impuestos federales. Para determinar la tasa de interés gravable T_a, sustituye los valores apropiados en la fórmula y resuelve para T_a.

$$\begin{aligned} T_f &= T_a(1 - F) \\ 0.0224 &= T_a(1 - 0.25) \end{aligned}$$

Realiza los cálculos

$$\begin{aligned} 0.0224 &= T_a(0.75) \\ \frac{0.0224}{0.75} &= T_a \\ 0.0299 &\approx T_a && \text{Redondeado a cuatro decimales} \end{aligned}$$

Verifica El resultado, 0.0299 o 2.99%, parece razonable porque es mayor que 2.24%, que es lo que esperábamos.

Responde La tasa de interés gravable alrededor de 2.99% le daría a Sharon aproximadamente el mismo interés que una inversión libre de impuestos de 2.24%.

b) Nos piden determinar cuál inversión proporcionaría a Sharon el mayor rendimiento.

Como lo vimos en el inciso **a)**, la tasa gravable equivalente a los bonos municipales es 2.99%. La tasa sujeta a impuestos del certificado de depósito es 3.70%. Por lo tanto, el certificado de depósito que paga 3.70% le dará a Sharon el mayor rendimiento de su inversión comparado con el bono municipal libre de impuestos que paga 2.24%

Resuelve ahora el ejercicio 83

2 Despejar una variable en una ecuación o fórmula

En muchas ocasiones podrías tener una ecuación o una fórmula con tenga la variable despejada; sin embargo, querrás despejar una variable diferente. Tomando en cuenta que las fórmulas son ecuaciones, usaremos el mismo procedimiento usado para despejar una variable de una ecuación en una fórmula.

Cuando tengas una ecuación (o fórmula) con una variable despejada y quieras despejar para otra variable, trata cada variable de la ecuación, excepto la que quieras despejar, como si fueran constantes. Entonces *aísla la variable* que requieras despejar usando los procedimientos similares a los que se usan para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 4 Despeja y de la ecuación $5x - 8y = 32$.

Solución Despejaremos la variable y aislando el término que contiene a y del lado izquierdo de la ecuación.

$$5x - 8y = 32$$

$$5x - 5x - 8y = -5x + 32 \qquad \text{Resta } 5x \text{ en ambos lados.}$$

$$-8y = -5x + 32$$

$$\frac{-8y}{-8} = \frac{-5x + 32}{-8} \qquad \text{Divide ambos lados entre } -8.$$

$$y = \frac{-5x + 32}{-8}$$

$$y = \frac{-1(-5x + 32)}{-1(-8)} \qquad \text{Multiplica el numerador y el denominador por } -1.$$

$$y = \frac{5x - 32}{8} \quad \text{o} \quad y = \frac{5}{8}x - 4$$

Resuelve ahora el ejercicio 29

EJEMPLO 5 Despeja y de la ecuación $2y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3y)$.

Solución Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 2.

$$2y - 3 = \frac{1}{2}(x + 3y)$$

$$2(2y - 3) = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}(x + 3y)\right] \qquad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, 2.}$$

$$4y - 6 = x + 3y \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

$$4y - 3y - 6 = x + 3y - 3y \qquad \text{Resta } 3y \text{ en ambos lados.}$$

$$y - 6 = x$$

$$y - 6 + 6 = x + 6 \qquad \text{Suma 6 en ambos lados.}$$

$$y = x + 6$$

Resuelve ahora el ejercicio 35

Ahora despejemos una variable de una fórmula. Recuerda: nuestra meta es aislar la variable que estamos despejando.

EJEMPLO 6 La fórmula del perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, donde l es el largo y w es el ancho del rectángulo (ver **Figura 2.2**). De esta fórmula despeja el ancho w.

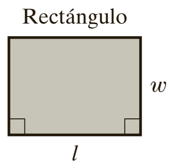


FIGURA 2.2

Solución Ya que despejaremos w, debemos aislar w de un lado de la ecuación.

$$P = 2l + 2w$$

$$P - 2l = 2l - 2l + 2w \quad \text{Resta } 2l \text{ en ambos lados.}$$

$$P - 2l = 2w$$

$$\frac{P - 2l}{2} = \frac{2w}{2} \quad \text{Divide entre 2 en ambos lados.}$$

$$\frac{P - 2l}{2} = w$$

Por lo tanto, $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ o $w = \dfrac{P}{2} - \dfrac{2l}{2} = \dfrac{P}{2} - l.$

Resuelve ahora el ejercicio 49

EJEMPLO 7 La fórmula utilizada para encontrar el área de un trapezoide es $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura y, b_1 y b_2 son las longitudes de las bases del trapezoide (ver **Figura 2.3**) Despeja b_2 de la fórmula.

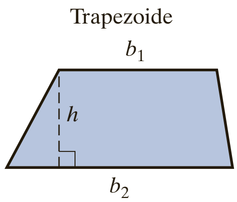


FIGURA 2.3

Solución Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, 2, para eliminar las fracciones.

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

$$2 \cdot A = \cancel{2}\left[\frac{1}{\cancel{2}}h(b_1 + b_2)\right] \quad \text{Multiplica ambos lados por 2.}$$

$$2A = h(b_1 + b_2)$$

$$\frac{2A}{h} = \frac{h(b_1 + b_2)}{h} \quad \text{Divide entre } h \text{ en ambos lados.}$$

$$\frac{2A}{h} = b_1 + b_2$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_1 - b_1 + b_2 \quad \text{Resta } b_1 \text{ de ambos lados.}$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_2$$

Resuelve ahora el ejercicio 57

EJEMPLO 8 En el ejemplo 3 de la página 77 mostramos la fórmula $T_f = T_a(1 - F)$.

a) Despeja T_a de esta fórmula.

b) John y Dorothy Cutter están en el rango de ingresos con 33% de impuestos. ¿Cuál es el monto gravable equivalente a 2.6% del rendimiento libre de impuestos?

Solución

a) Deseamos despejar T_a de esta fórmula. Por lo tanto, trataremos al resto de variables de la ecuación como si fueran constantes. Como T_a está multiplicando a $(1 - F)$, para aislar T_a dividimos ambos lados de la ecuación entre $1 - F$.

$$T_f = T_a(1 - F)$$

$$\frac{T_f}{1 - F} = \frac{T_a\cancel{(1 - F)}}{\cancel{1 - F}} \quad \text{Divide ambos lados entre } 1 - F.$$

$$\frac{T_f}{1 - F} = T_a \quad \text{o} \quad T_a = \frac{T_f}{1 - F}$$

b) Sustituye los valores apropiados en la fórmula encontrada en el inciso **a)**.

$$T_a = \frac{T_f}{1 - F}$$

$$T_a = \frac{0.026}{1 - 0.33} = \frac{0.026}{0.67} \approx 0.039$$

Por lo tanto, el rendimiento gravable equivalente sería alrededor de 3.9%.

Resuelve ahora el ejercicio 63

CONJUNTO DE EJERCICIOS 2.2

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) apropiados de la siguiente lista.

fórmula	modelo matemático	entender	traducir
checar	subíndice	superíndice	

1. Expresar un problema usando símbolos matemáticas es crear un ____________.
2. El número o variable colocado abajo a la derecha de las variables es un ____________.
3. Expresar un problema algebraicamente es ____________ el problema a lenguaje matemático.
4. El primer paso en nuestro procedimiento de resolución de problemas es ____________ el problema.
5. Para ____________ una respuesta nos preguntamos primero “¿La respuesta tiene sentido?”.
6. Una ____________ es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real.

Practica tus habilidades

Evalúa las siguientes fórmulas para los valores dados. Usa la tecla $\boxed{\pi}$ *en tu calculadora para evaluar* π *cuando lo necesites. Redondea tus respuestas a centésimas.*

7 $W = Fd$ cuando $F = 20$, $d = 15$ (es una fórmula de física usada para calcular el trabajo)

8. $A = lw$ cuando $l = 7$, $w = 6$ (fórmula para encontrar el área de un rectángulo)

9. $R = R_1 + R_2$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (es una fórmula usada para calcular la resistencia en electricidad)

10. $A = \frac{1}{2}bh$ cuando $b = 7$, $h = 6$ (fórmula para encontrar el área de un triángulo)

11. $A = \pi r^2$ cuando $r = 8$ (fórmula para encontrar el área de un círculo)

12. $P_1 = \dfrac{T_1P_2}{T_2}$ cuando $T_1 = 150$, $T_2 = 300$, $P_2 = 200$ (fórmula de química que relaciona la temperatura y la presión de los gases)

13. $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ cuando $x_1 = 40$, $x_2 = 90$, $x_3 = 80$ (fórmula para encontrar el promedio de tres números)

14. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ cuando $h = 15$, $b_1 = 20$, $b_2 = 28$ (fórmula para encontrar el área de un trapezoide)

15. $A = P + Prt$ cuando $P = 160$, $r = 0.05$, $t = 2$ (fórmula bancaria que proporciona el saldo total en una cuenta después de sumar los intereses)

16. $E = a_1p_1 + a_2p_2$ cuando $a_1 = 10$, $p_1 = 0.2$, $a_2 = 100$, $p_2 = 0.3$ (fórmula usada en estadística para encontrar el valor esperado de un evento)

17. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cuando $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_1 = -6$ (fórmula para encontrar la pendiente de una línea recta, discutiremos esta fórmula en el Capítulo 3)

18. $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ cuando $G = 0.5$, $m_1 = 100$, $m_2 = 200$, $r = 4$ (fórmula de física para calcular la fuerza de atracción entre dos masas separadas entre sí una distancia r)

19. $R_T = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (fórmula de electrónica para calcular la resistencia total en un circuito con dos resistencias conectadas en paralelo)

20. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ cuando $x_2 = 5$, $x_1 = -3$, $y_2 = -6$, $y_1 = 3$ (fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos sobre una línea recta; discutiremos esta fórmula en el Capítulo 10)

21. $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas; discutiremos la fórmula cuadrática en el Capítulo 8)

22. $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas)

23. $A = p\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ cuando $p = 100$, $r = 0.06$, $n = 1$, $t = 3$ (fórmula para calcular el interés compuesto; ver ejemplo 2)

24. $z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ cuando $\overline{x} = 78$, $\mu = 66$, $\sigma = 15$, $n = 25$ (fórmula de estadística para encontrar la desviación estándar de una muestra con promedio $\overline{x}$)

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para y (ver ejemplos 4 y 5).

25. $3x + y = 5$

26. $3x + 4y = 8$

27. $3x + 2y = 6$

28. $-6x + 5y = 25$

29. $6x - 2y = 16$

30. $9x = 7y + 23$

31. $\frac{3}{4}x - y = 5$

32. $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 2$

33. $3(x - 2) + 3y = 6x$

34. $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 6)$

35. $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 9)$

36. $\frac{1}{5}(x + 3y) = \frac{4}{7}(2x - 1)$

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para la variable indicada (ver los ejemplos 6-8).

37. $E = IR$, para I

38. $C = 2\pi r$, para r

39. $C = \pi d$, para d

40. $A = lw$, para l

41. $P = 2l + 2w$, para l

42. $P = 2l + 2w$, para w

43. $V = lwh$, para h

44. $V = \pi r^2 h$, para h

45. $A = P + Prt$, para r

46. $Ax + By = C$, para y

47. $V = \frac{1}{3}lwh$, para l

48. $A = \frac{1}{2}bh$, para b

49. $y = mx + b$, para m

50. $IR + Ir = E$, para R

51. $y - y_1 = m(x - x_1)$, para m

52. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para σ

53. $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$, para μ

54. $y = \frac{kx}{z}$, para z

55. $P_1 = \frac{T_1 P_2}{T_2}$, para T_2

56. $F = \frac{mv^2}{r}$, para m

57. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, para h

58. $D = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{n}$, para n

59. $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para n

60. $S = \frac{n}{2}(f + l)$, para l

61. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, para F

62. $F = \frac{9}{5}C + 32$, para C

63. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$, para m_1

64. $F = \frac{km_1 m_2}{d^2}$ para m_2

Resolución de problemas

En los ejercicios 65-88, redondea el resultado hasta dos decimales cuando sea el caso.

65. Cambio de moneda

a) De acuerdo con el Sitio Web Convertidor Universal, el día 16 de agosto de 2008, un dólar americano podía ser intercambiado por 0.68 euros. Escribe una fórmula, usando *d* para denotar la cantidad de dólares americanos y *e* para denotar la cantidad de euros, que se pueda utilizar para convertir dólares a euros.

b) Escribe una fórmula que pueda ser usada para convertir euros a dólares.

© Shutterstock

66. Cambio de moneda

a) De acuerdo con el Sitio Web Convertidor Universal, el día 16 de agosto de 2008, un dólar americano podía ser intercambiado por 110.54 yenes japoneses. Escribe una fórmula, usando *d* para denotar la cantidad de dólares americanos y *y* para denotar la cantidad de yenes, que se pueda utilizar para convertir dólares a yenes.

b) Escribe una fórmula que pueda ser usada para convertir yenes a dólares.

En los ejercicios 67-70, usa la fórmula de interés simple $i = prt$. Ver ejemplo 1.

67. Préstamo personal Edison Tan le ha hecho un préstamo a su colega, Ken Pothoven, de $1100 a una tasa de interés simple de 7% anual por 4 años. Determina el interés simple que Ken debe pagar a Edison al término de los 4 años.

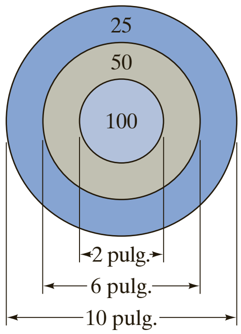
68. Determina la tasa Steve Marino pidió prestados $500 a su unión de crédito por 2 años. El interés simple que pagó fue de $52.90. ¿Qué tasa de interés simple se le cobró a Steve?

69. Determina la duración de un préstamo Mary Haran le hizo a su hija, Dawn, un préstamo por $20,000 a una tasa de interés simple de 3.75% al año. Al final del periodo del préstamo, Dawn pagó a Mary los $20,000 originales más $4875 de intereses. Determina la duración del préstamo.

70. Un certificado de depósito Erin Grabish recibió $2000 por hablar en el seminario de planeación financiera. Erin invirtió el dinero en un certificado de depósito por 2 años. Cuando canjeó el certificado de depósito, recibió $2166. ¿Qué tasa de interés simple recibió Erin por este certificado de depósito?

En los ejercicios 71-76, si no estás seguro de qué fórmula usar, consulta el Apéndice A.

71. Area de tablero de dardos Marc Mazzoni, campeón de lanzamiento de dardo en el estado de Michigan, practica sobre un tablero con círculos concéntricos como se muestra en la figura.



a) Encuentra el área del círculo marcado como 100.
b) Encuentra el área de todo el tablero.

72. Planeando un arenero Betsy Nixon está planeando construir un arenero rectangular para su hija. Ella cuenta con 38 pies de madera para hacer las paredes del arenero. Si la longitud tiene que ser de 11 pies, ¿de qué tamaño debe ser el ancho de los lados?

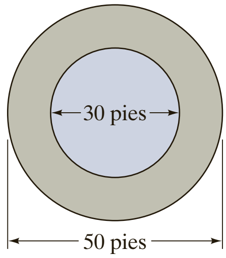
73. Volumen de concreto para un camino de entrada Anthony Palmiotto está preparando concreto para construir un camino de entrada. el camino debe tener 15 pies de largo por 10 pies de ancho por 6 pulgadas de profundidad.

a) Encuentra el volumen de concreto que se necesita en pies cúbicos.

b) Si una yarda cúbica = 27 pies cúbicos, ¿cuántas yardas cúbicas de concreto se necesitan?

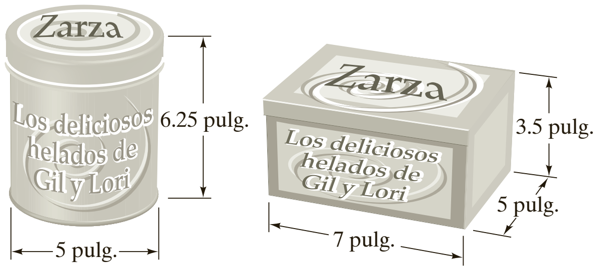
c) Si el concreto cuesta $35 por yarda cúbica, ¿cuál será el costo del concreto? Solo es posible comprar concreto por yardas enteras.

74. El área de un helipuerto Un helipuerto en Raleigh, Carolina del Norte, tiene dos círculos concéntricos como se muestra en la figura de arriba a la derecha.

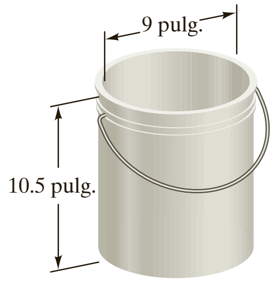


Encuentra el área de la región gris en la figura.

75. Recipientes de helado La compañía "Los deliciosos helados de Gil y Lori" vende helados en dos tipos de contenedores: un tubo cilíndrico y una caja rectangular, como se muestra en la figura. ¿En cuál de los contenedores cabe más helado y cuál es la diferencia de sus volúmenes?



76. Capacidad de una cubeta Sandra Hakanson tiene una cubeta en la cual desea mezclar detergente. Las dimensiones de la cubeta se muestran en la figura.



a) Encuentra la capacidad de la cubeta en pulgadas cúbicas.

b) Si 231 pulgadas cúbicas = 1 galón, ¿cuál es la capacidad de la cubeta en galones?

c) Si las instrucciones en la botella de detergente indican agregar 1 onza por galón de agua, ¿cuánto detergente debe agregar Sandra a la cubeta llena de agua?

Para los ejercicios 77-80, consulta el ejemplo 2.

77. Cuenta de ahorro Beth Rechsteiner invirtió $10,000 en una cuenta de ahorro que paga un interés compuesto trimestral de 6%. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al trascurrir 2 años?

78. Cálculo mensual de intereses Vigay Patel invirtió $8500 en una cuenta de ahorro que paga un interés compuesto mensual de 3.2%. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de 4 años?

79. Un certificado de depósito Heather Kazakoff invirtió $4390 en un certificado de depósito que paga un interés compuesto semestral de 4.1%. ¿A cuánto equivaldrá el certificado de depósito después de 36 meses?

80. Comparando cuentas James Misenti tiene $1500 para invertir durante 1 año. James tiene la opción de una cuenta en una unión de crédito la cuál paga un interés simple de 4.5% o una cuenta de débito que paga un interés compuesto trimestral de 4%. ¿En qué cuenta le darían más intereses por lo que invirtió?, y ¿de cuánto es la diferencia?

Para los ejercicios 81-84, consulta el ejemplo 3.

81. Tasa de impuestos equivalente Kimberly Morse-Austin es una estudiante y se encuentra en el rango federal de ingresos con 15% de impuestos. Kimberly está considerando invertir \$825 en un fondo común libre de impuestos que paga un interés simple de 3.5%. Determina la tasa de impuestos equivalente a una tasa libre de impuestos de 3.5%.

82. Comparando inversiones Dave Ostrow se encuentra en el rango federal de ingresos con 35% de impuestos y está considerando dos inversiones: un abono en un fondo común libre de impuestos que paga un interés simple de 3% o un certificado de depósito que paga un interés simple de 4.5%. ¿Cuál de las inversiones proporciona mayores ganancias?

83. Inversiones de padre e hijo Anthony Rodríguez se encuentra en el rango federal de ingresos con 35% de impuestos y su hijo Ángelo, en el rango con 28%. Cada uno de ellos está considerando crear un fondo común libre de impuestos que proporciona un interés simple de 4.6%.

a) Encuentra la tasa de impuestos equivalente a una tasa de 4.6% libre de impuestos para Anthony.

b) Encuentra la tasa de impuestos equivalente a una tasa de 4.6% libre de impuestos para Ángelo.

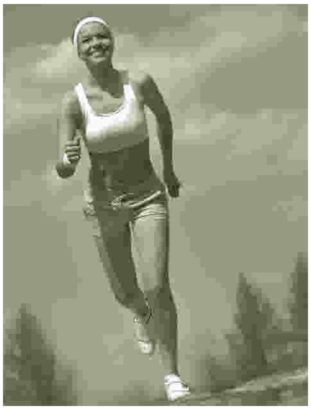
84. Comparación de inversiones Marissa Felberty está considerando invertir \$9200 en una cuenta que genera impuestos que da un interés simple de 6.75% o en una cuenta libre de impuestos que da un interés simple de 5.5%. Si ella se encuentra en el rango federal con impuestos de 25%, ¿cuál inversión le generará mayores ganancias?

Los ejercicios 85-88 son de situaciones diversas. Resuelve todos.

85. Pérdida de peso Un nutriólogo explica a Robin Thomas que una persona pierde peso al quemar más calorías de las que consume. Si Robin quema más de 2400 calorías diarias, su pérdida de peso puede calcularse por el siguiente modelo matemático: $w = 0.02c$, donde w es el peso perdido *semanal* y c es el número de calorías quemadas por *día* por *encima* de 2400 calorías.

a) Encuentra la pérdida de peso semanal de Robin si al ejercitarse quema 2600 calorías por día.

b) ¿Cuántas calorías tendría que quemar Robin en un día para perder 2 libras en una semana?



© Glowimages

86. Toma de presión Cuando se realiza una toma de presión, el ritmo cardiaco máximo permitido, m, en unidades de latidos por minuto, puede ser aproximado por la ecuación $m = -0.875x + 190$, donde x representa la edad del paciente desde 1 a 99. Usando este modelo matemático, encuentra

a) el ritmo cardiaco máximo para una persona con 50 años de edad.

b) la edad de una persona cuyo ritmo cardiaco máximo sea de 160 latidos por minuto.

87. Saldo de una cartera de inversiones Algunos asesores financieros recomiendan la siguiente regla de oro a los inversionistas: "El porcentaje de acciones en su cartera debe ser igual a 100 menos su edad". El resto debe estar en forma de bonos o efectivo.

a) Construir un modelo matemático para el porcentaje de la cartera que debe ser usada en acciones (usa S para denotar el porcentaje en acciones y a para la edad de una persona).

b) Usando esta regla de oro, encuentra el porcentaje de la cartera que debe mantenerse en acciones para una persona de 60 años de edad.

88. Índice de masa corporal El índice de masa corporal es una manera estándar de evaluar el peso de una persona en relación con su estatura. Para determinar tu índice de masa corporal (IMC) usando las medidas métricas, divide tu peso en kilogramos, por tu estatura, en metros cuadrados. Para calcular tu IMC usando libras y pulgadas, multiplica tu peso en libras por 705, luego divídelo entre el cuadrado de tu estatura en pulgadas.

a) Crea una fórmula para encontrar el IMC de una persona usando kilogramos y metros.

b) Crea una fórmula para encontrar el IMC de una persona cuando su peso está dado en libras y su estatura en pulgadas.

c) Determina tu IMC.

Conjunto de ejercicios 2.2

1. Modelo matemático **3.** Traduce **5.** Verifica **7.** 300 **9.** 300 **11.** 201.06 **13.** 70 **15.** 176 **17.** $\frac{7}{4}$ **19.** 66.67 **21.** 4 **23.** 119.10 **25.** $y = -3x + 5$ **27.** $y = -\frac{3}{2}x + 3$ **29.** $y = 3x - 8$ **31.** $y = \frac{3}{4}x - 5$ **33.** $y = x + 2$ **35.** $y = -\frac{4}{3}x + 11$ **37.** $I = \frac{E}{R}$ **39.** $d = \frac{C}{\pi}$ **41.** $l = \frac{P - 2w}{2}$ **43.** $h = \frac{V}{lw}$ **45.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **47.** $l = \frac{3V}{wh}$ **49.** $m = \frac{y - b}{x}$ **51.** $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ **53.** $\mu = x - z\sigma$ **55.** $T_2 = \frac{T_1P_2}{P_1}$ **57.** $h = \frac{2A}{b_1 + b_2}$ **59.** $n = \frac{2S}{f + l}$ **61.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **63.** $m_1 = \frac{Fd^2}{km_2}$ **65.** **a)** $e = 0.68d$ **b)** $d = \frac{e}{0.68}$ o $d \approx 1.47e$ **67.** \$308 **69.** 6.5 años **71.** **a)** 3.14 pulgadas cuadradas **b)** 78.54 pulgadas cuadradas **73.** **a)** 75 pies cúbicos **b)** 2.78 yardas cúbicas **c)** \$105 **75.** El cilindro, la diferencia es 0.22 pulgadas cúbicas **77.** \$11,264.93 **79.** \$4958.41 **81.** $\approx$4.12% **83.** **a)** $\approx$7.08% **b)** $\approx$6.39% **85.** **a)** 4 libras por semana **b)** 2500 calorías **87.** **a)** $S = 100 - a$ **b)** 40% **89.** **a)** $s = \frac{rt^2}{u}$ **b)** $u = \frac{rt^2}{s}$ **90.** -40 **91.** 1 **92.** -125 **93.** $\frac{4}{3}$

Conjunto de ejercicios 2.3

1. $x + 3$ **3.** $7 - x$ **5.** Menor que **7.** $19.95y$ **9.** $11n - 7.5$ **11.** $x, 12 - x$ **13.** $w, w + 29$ **15.** $p, 165 - p$ **17.** $z, z + 1.3$ **19.** $e, e + 0.22e$ **21.** $A = 72°, B = 18°$ **23.** $A = 36°, B = 144°$ **25.** 40°, 60°, 80° **27.** \$32 **29.** 25 viajes **31.** 225 millas **33.** 13 veces **35.** 10 veces **37.** \$1600 **39.** Noroeste: \$2.455 millones, sudeste: \$2.455 millones **41.** 4 gramos **43.** \$6.55 por hora **45.** Pastos: 12, malezas: 19, árboles: 26 **47.** \$16.25 **49.** **a)** $\approx$63.49 meses o 5.29 años **b)** First National **51.** **a)** $\approx$28 meses o 2.33 años **b)** Sí **53.** Phelps: 8, Coughlin: 6, Lochte: 4, Grevers: 3 **55.** Animales: 250,000, plantas: 350,000, insectos no escarabajos: 540,000, escarabajos: 360,000 **57.** 9 pulgadas, 12 pulgadas, 15 pulgadas **59.** 10 pies, 24 pies, 26 pies **61.** 13 metros por 13 metros **63.** 3 pies por 6 pies **65.** \$60 **67.** 3 **69.** \$16 **71.** **a)** $\frac{88 + 92 + 97 + 96 + x}{5} = 90$ **b)** Las respuestas variarán. **c)** 77 **73.** **a), b)** Las respuestas variarán. **75.** 220 millas **78.** $\frac{32}{5}$ **79.** -2.7 **80.** $\frac{5}{32}$ **81.** -10 **82.** $\frac{y^{18}}{8x^{12}}$