UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE QUERÉTARO
DIVISIÓN ECONÓMICO ADMINISTRATIVA
PE Logística área Cadena Suministros

# TEMA: EXPONENTES Y LOGARITMOS

Curso: Matemáticas Financieras

Autor: Arturo Corona Pegueros
Mayo de 2022

Exponentes y Logaritmos

## Información general

**Programa Educativo**: Logística área Cadena de Suministro.

**Asignatura**: Matemáticas Financieras.

**Cuatrimestre**: 5to.

**Unidad programática**: I. Conceptos generales.

**Propósito del material**: Ser un apoyo informativo para el desarrollo del curso presencial, presentando ejemplos y explicaciones de los casos básicos de este tema: definición y leyes de exponentes y logaritmos, así como su aplicación en ejercicios sencillos.

Es importante aclarar que el material **NO sustituye** la clase presencial.

**Fecha de elaboración**: Mayo de 2022.

**Autor**: Arturo Corona Pegueros.

Exponentes y Logaritmos

**Recordemos dos temas importantes: exponentes y logaritmos.**

### *Exponentes*

Un exponente es el número de veces que otro número se multiplica por sí mismo.

base → $15^{4} = (15)(15)(15)(15)$

exponente

De forma algebraica:

$$x^3 = \underbrace{(x)(x)(x)}_{\text{3 veces}} \qquad 5^x = \underbrace{(5)(5)\ldots(5)}_{\text{x veces}}$$

De acuerdo con Disfruta las matemáticas (2020), tenemos las siguientes leyes de exponentes:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ ➔ $5^2 \cdot 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$ ➔ $5^2 \cdot 5^4 = 5^6$ ➔ $25 \cdot 625 = 15625$
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ➔ $\frac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$ ➔ $\frac{3^7}{3^2} = 3^5$ ➔ $\frac{2187}{9} = 243$

   $\frac{5^3}{5^3} = 5^0$ ➔ $\frac{125}{125} = 5^0$ ➔ $1 = 5^0$

   $\frac{8^2}{8^2} = 8^0$ ➔ $\frac{64}{64} = 8^0$ ➔ $1 = 8^0$

   $\frac{123456^{789}}{123456^{789}} = 123456^0$ ➔ $1 = 123456^0$
3) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ ➔ $5^2 \cdot 3^2 = (5 \cdot 3)^2$ ➔ $25 \cdot 9 = (15)^2$ ➔ $225 = 225$

   $(6 \cdot 10)^3 = 6^3 \cdot 10^3$ ➔ $(60)^3 = 216 \cdot 1000$ ➔ $216000 = 216000$
4) $(a^n)^m = a^{nm}$ ➔ $(4^2)^3 = 4^{(2)(3)} = 4^6$ ➔ $(4^2)^3 = 4^6$ ➔ $(16)^3 = 4096$ ➔ $4096 = 4096$
5) $a^0 = 1$, siempre y cuando $a \neq 0$ ➔ $2021^0 = 1$ ➔ $123.456^0 = 1; 0^0 \neq 1$
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ➔ $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ ➔ $0.1111\ldots = \frac{1}{9}$ ➔ $0.1111\ldots = 0.1111\ldots$

Exponentes y Logaritmos

## *Logaritmos*

Según Khan Academy (2022), un logaritmo es el exponente al que se debe elevar una base para obtener un número.

$$15^{4} = 50625$$

El logaritmo de 50625 es 4 en base 15.

$$\log_{15} 50625 = 4$$

Las bases más comunes son **10 y *e*** $\cong 2.718281 \ldots$ (número de Euler), y se simbolizan:

| | |
|---|---|
| $\log_{10} 20 \rightarrow \log 20 = 1.30102 \ldots$ | $\log_e 20, \ln 20 = 2.99573 \ldots$ |
| $10^{1.30102} = 20$ | $e^{2.99573} = 20 \rightarrow 2.718281^{2.99573} = 20$ |
| **Logaritmo** de 20 (en base 10) | **logaritmo natural** de 20 (en base e) |

Los logaritmos en base 10 y en base e los puede obtener tu calculadora científica. Ubica la tecla que permite estos cálculos para que realices los siguientes ejercicios.

I. Calcula los siguientes logaritmos (anota seis cifras decimales por lo menos):

1) $\log 40$
2) $\ln 15.6$
3) $\log 0.059$
4) $(\log 30) \div (\log 3)$
5) $(\ln 4) + (\ln 50)$

II. Verifica si son verdaderas las siguientes expresiones calculando los logaritmos con seis cifras decimales.

6) $\log 100 = 2 \log 10$
7) $\log(4.56)^{5} = 5(\log 4.56)$
8) $\log\ 20 = \log 10 + \log 10$
9) $\log(5 \cdot 8) = (\log 5)(\log 8)$
10) $\log 10 + \log 20 + \log 30 = \log(10 \cdot 20 \cdot 30)$

Leyes de logaritmos.

1. $\log A^{n} = n \log A \rightarrow \log 5^{2} = 2 \log 5 \rightarrow \log 25 = 2(0.6989) \rightarrow 1.3979 = 1.3978$
2. $\log AB = \log A + \log B \rightarrow \log(20)(21) = \log 20 + \log 21 \rightarrow$

   $\log 420 = 1.30102 + 1.32221 \rightarrow 2.6232 = 2.6232$

Exponentes y Logaritmos

3. $\log\frac{A}{B} = \log A - \log B$ ➔ $\log\frac{240}{20} = \log 240 - \log 20$ ➔ $\log 12 = 2.3802 - 1.30102$
➔ $1.07918 = 1.07918$
4. $\log_a a = 1$ ➔ $\log_{10} 10 = 1$ ➔ $\log_{45} 45 = 1$

La función u operación logaritmo **NO** se puede realizar sobre un número negativo.

$\log -5$ ➔ error ➔ la ecuación $10^x = -5$ no tiene solución con números reales.

Los logaritmos se usan en la solución de ciertos tipos de ecuaciones, como la siguiente:

$$5^x = 32$$

Se puede usar la función logaritmo como una operación, de la siguiente forma:

$$\underbrace{\log 5^x = \log 32}_{\text{Aplicamos logaritmo en ambos lados de la ecuación}} \rightarrow \underbrace{x \log 5 = \log 32}_{\text{Aplicamos propiedad de los logaritmos}} \rightarrow \underbrace{x(0.6989) = 1.50514 \rightarrow x = \frac{1.50514}{0.6989}}_{\text{Despejamos}} \rightarrow$$

$$x = 2.1535$$

Comprobación: $5^x = 32$ ➔ $5^{2.1535} = 32$ ➔ $32.00603 = 32$

También pudimos usar logaritmo base e:

$$\ln 5^x = \ln 32 \rightarrow x \ln 5 = \ln 32 \rightarrow x(1.6094) = 3.4657 \rightarrow x = \frac{3.4657}{1.6094} \rightarrow$$

$$x = 2.1534$$

Otro tipo de ecuación es la siguiente:

$$2\log(x) - \log(x - 16) = 2$$

Solución:

$2\log(x) - \log(x - 16) = 2$ ➔ $\log(x^2) - \log(x - 16) = 2$ ➔ $\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2$ ➔

$10^2 = \frac{x^2}{x-16}$ ➔ $100 = \frac{x^2}{x-16}$ ➔ $100(x - 16) = x^2$ ➔ $100x - 1600 = x^2$ ➔

Exponentes y Logaritmos

$-x^2 + 100x - 1600 = 0$ ➔ $a = -1, b = 100,\ c = -1600,\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x_1 = 80, x_2 = 20$$

Comprobación:

$$x_1 = 80,\ 2\log(x) - \log(x-16) = 2 \text{ ➔ } 2\log(80) - \log(80-16) = 2 \text{ ➔}$$

$$2\log(80) - \log(64) = 2 \text{ ➔ } 2 = 2$$

$$x_2 = 20,\ 2\log(x) - \log(x-16) = 2 \text{ ➔ } 2\log(20) - \log(20-16) = 2 \text{ ➔}$$

$$2\log(20) - \log(4) = 2 \text{ ➔ } 2 = 2$$

Calcular el valor de n en la siguiente ecuación:

$$M = C(1+i)^n$$

Sabiendo, que $M = 5000, C = 3500, i = 0.015$

Solución:

$$M = C(1+i)^n \Rightarrow 5000 = 3500(1+0.015)^n \Rightarrow \log(5000) = \log[3500(1.015)^n] \Rightarrow$$

$$\log(5000) = \log(3500) + \log(1.015)^n \Rightarrow \log(5000) = \log(3500) + n\log(1.015) \Rightarrow$$

$$3.69897 = 3.54406 + n(0.006466) \Rightarrow 3.69897 - 3.54406 = 0.006466n \Rightarrow$$

$$\frac{0.15491}{0.006466} = n \Rightarrow n = 23.9576$$

Otro camino puede ser este:

$$\log(5000) = \log(3500) + \log(1.015)^n \Rightarrow \log(5000) = \log(3500) + n\log(1.015) \Rightarrow$$

$$\log(5000) - \log(3500) = n\log(1.015) \Rightarrow \frac{(\log(5000) - \log(3500))}{\log(1.015)} = n \Rightarrow n = 23.9562$$

Ejercicio:

La fórmula de anualidad vencida es

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+1)^n}\right]$$

Despejar n si P = 40000, A = 2000, i = 0.013

Exponentes y Logaritmos

Bibliografía:

Introducción a los logaritmos. (2022). Introducción a los logaritmos. **Khan Academy**. Recuperado de https://es.khanacademy.org/math/algebra2/x2ec2f6f830c9fb89:logs/x2ec2f6f830c9fb89:log-intro/a/intro-to-logarithms, 2022.

Leyes de exponentes. (2020). Leyes de los exponentes. **Disfruta las matemáticas**. Recuperado de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/exponentes-leyes.html. 2022.

Diseñado por Arturo Corona Pegueros
Universidad Tecnológica de Querétaro
Querétaro, México.
Última actualización: mayo de 2022
Contacto: acorona@uteq.edu.mx