UNIVERSIDAD TECNOLOGICA DEL ESTADO DE QUERETARO

Actividad 2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

PROFESOR:

CARLOS DELGADO ALCARAZ

MATERIA:

MODELOS MATEMATICOS

INTEGRANTES:

HANNIA PÉREZ AMADOR

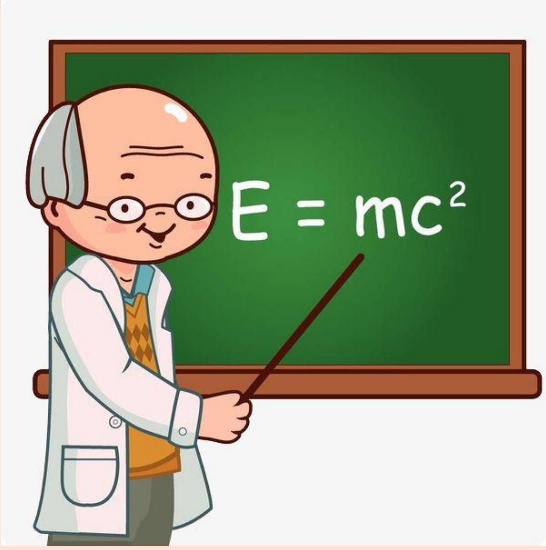
ESLY YOANA ARELLANO FLORES

JOSUÉ RAMÓN HERNÁNDEZ DÍAZ

YESENIA HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

GRUPO:

LC21



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MEDIANTE MATRICES

Durante los siglos XVIII y XIX se desarrollaron diversos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado basados en la teoría de matrices. A los ya consabidos procedimientos gráficos y algebraicos usados desde antiguo se sumaron los más elaborados que propusieron, con casi un siglo de diferencia, Gabriel Cramer y Eugène Rouché.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales (de primer grado) se utilizan comúnmente tres tipos de procedimientos:

- ✓ Métodos algebraicos, clasificados como métodos de sustitución, igualación o reducción.
- ✓ Métodos gráficos, donde cada ecuación del sistema se corresponde con un plano, en el caso de que el sistema sea de tres incógnitas, de forma que las soluciones del sistema coinciden con los puntos de intersección de todos los planos.
- ✓ Métodos matriciales, basados en el uso de la teoría de matrices.

MÉTODOS MATRICIALES

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse en forma matricial de la manera siguiente:

$C \times X = B$

donde C es la matriz de los coeficientes, X la de las incógnitas y B la de los términos independientes (ver t15).

En la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por métodos matriciales se emplean normalmente dos procedimientos alternativos: el de la matriz inversa y el método de eliminación gaussiana.

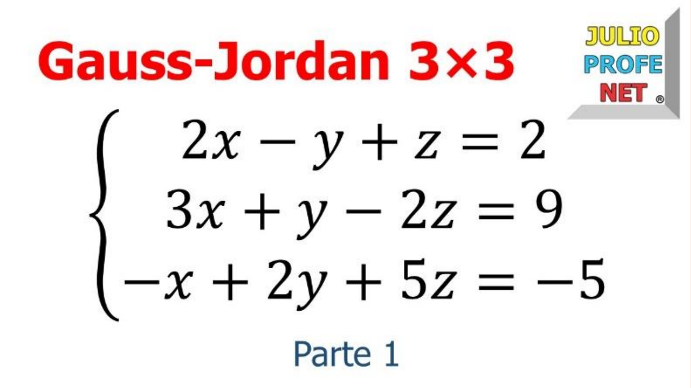
El método de la matriz inversa (ver t15) consiste en hallar la matriz inversa de C para obtener la matriz de las incógnitas, efectuando la operación C-1 × B

$X = C-1 \times B$

Por su parte, el método de eliminación gaussiana (ver t15) consiste en obtener una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada del sistema.

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

Este método debe su nombre a Carl Friedrich Gauss y a Wilhelm Jordan. Se trata de una serie de algoritmos del algebra lineal para determinar los resultados de un sistema de ecuaciones lineales y así hallar matrices e inversas. El sistema de Gauss se utiliza para resolver un sistema de ecuaciones y obtener las soluciones por medio de la reducción del sistema dado a otro que sea equivalente en el cual cada una de las ecuaciones tendrá una incógnita menos que la anterior. La matriz que resulta de este proceso lleva el nombre que se conoce como forma escalonada.



Este método, permite resolver hasta 20 ecuaciones simultáneas. Lo que lo diferencia del método Gaussiano es que cuando es eliminada una incógnita, se eliminará de todas las ecuaciones restantes, o sea, las que anteceden a la ecuación principal, así como de las que la siguen a continuación. De esta manera el paso de eliminación forma una matriz identidad en vez de una matriz triangular. No es necesario entonces utilizar la sustitución hacia atrás para conseguir la solución.

Actividad 2. Resolución sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices.

1. Resuelva con el método de matriz inversa el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

   a – b = - 6   b + c = 3   c + 2d = 4   2a – 3d = 5

   a. Determinar A-1
   b. Comprobar resultados con la propiedad de las matrices: Matriz x Matriz inversa = Matriz identidad
   c. Determinar el valor de las variables con la operación: Matriz inversa x matriz de constantes = Valor de las variables.
   d. Comprobar resultados con las ecuaciones originales.

$a - b = -6 \qquad b + c = 3 \qquad c + 2d = 4 \qquad 2a - 3d = 5$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R.P \\ \text{Ninguna} \\ \text{Ninguna} \\ R_4 - 2R_1 \end{array}$$

$R_4 - 2R_1$

$(2) - 2(1) = 0$
$(0) - 2(-1) = 2$
$(0) - 2(0) = 0$
$(-3) - 2(0) = -3$
$(0) - 2(1) = -2$
$(0) - 2(0) = 0$
$(0) - 2(0) = 0$
$(1) - 2(0) = 1$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 + 1R_2 \\ RP \\ \\ R_4 - 2R_2 \end{array}$$

$R_1 + 1R_2$

$(1) + 1(0) = 1$
$(-1) + 1(1) = 0$
$(0) + 1(1) = 1$
$(0) + 1(0) = 0$
$(1) + 1(0) = 1$
$(0) + 1(1) = 1$
$(0) + 1(0) = 0$
$(0) + 1(0) = 0$

$R_4 - 2R_2$

$(0) - 2(0) = 0$
$(2) - 2(1) = 0$
$(0) - 2(1) = -2$
$(-3) - 2(0) = -3$
$(-2) - 2(0) = -2$
$(0) - 2(1) = -2$
$(0) - 2(0) = 0$
$(1) - 2(0) = 1$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 - 1R_3 \\ R_2 - 1R_3 \\ R.P. \\ R_4 + 2R_3 \end{array}$$

$R_1 - 1R_3$

$(1) - 1(0) = 1$
$(0) - 1(0) = 0$
$(1) - 1(1) = 0$
$(0) - 1(2) = -2$
$(1) - 1(0) = 1$
$(1) - 1(0) = 1$
$(0) - 1(1) = -1$
$(0) - 1(0) = 0$

$R_2 - 1R_3$

$(0) - 1(0) = 0$
$(1) - 1(0) = 1$
$(1) - 1(1) = 0$
$(0) - 1(2) = -2$
$(0) - 1(0) = 0$
$(1) - 1(0) = 1$
$(0) - 1(1) = -1$
$(0) - 1(0) = 0$

$R_4 + 2R_3$

$(0) + 2(0) = 0$
$(0) + 2(0) = 0$
$(-2) + 2(1) = 0$
$(-3) + 2(2) = 1$
$(-2) + 2(0) = -2$
$(-2) + 2(0) = -2$
$(0) + 2(1) = 2$
$(1) + 2(0) = 1$

$$
\begin{array}{c}
R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
R_1 + 2R_4 \\ R_2 + 2R_4 \\ R_3 - 2R_4 \\ RP
\end{array}
$$

$R_1 + 2R_4$

$(1) + 2(0) = 1$
$(0) + 2(0) = 0$
$(0) + 2(0) = 0$
$(-2) + 2(1) = 0$
$(1) + 2(-2) = -3$
$(1) + 2(-2) = -3$
$(-1) + 2(2) = 3$
$(0) + 2(1) = 2$

$R_2 + 2R_4$

$(0) + 2(0) = 0$
$(1) + 2(0) = 1$
$(0) + 2(0) = 0$
$(-2) + 2(1) = 0$
$(0) + 2(-2) = -4$
$(1) + 2(-2) = -3$
$(-1) + 2(2) = 3$
$(0) + 2(1) = 2$

$R_3 - 2R_4$

$(0) - 2(0) = 0$
$(0) - 2(0) = 0$
$(1) - 2(0) = 1$
$(2) - 2(1) = 0$
$(0) - 2(-2) = 4$
$(0) - 2(-2) = 4$
$(1) - 2(2) = -4$
$(0) - 2(1) = -2$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -3 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -4 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 & 1
\end{array}\right]
$$

Comprobación:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 0 & -3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-3 & -3 & 3 & 2 \\
-4 & -3 & 3 & 2 \\
4 & 4 & -4 & -2 \\
-2 & 2 & 2 & 1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$C_{11} = -3 + 4 + 0 + 0 = 1$
$C_{12} = -3 + 3 + 0 + 0 = 0$
$C_{13} = 3 - 3 + 0 + 0 = 0$
$C_{14} = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$

$C_{31} = 0 + 0 + 4 - 4 = 0$
$C_{32} = 0 + 0 + 4 - 4 = 0$
$C_{33} = 0 + 0 - 3 + 4 = 1$
$C_{34} = 0 + 0 - 2 + 2 = 0$

$C_{21} = 0 - 4 + 4 + 0 = 0$
$C_{22} = 0 - 3 + 4 + 0 = 1$
$C_{23} = 0 + 3 - 3 + 0 = 0$
$C_{24} = 0 + 2 - 2 + 0 = 0$

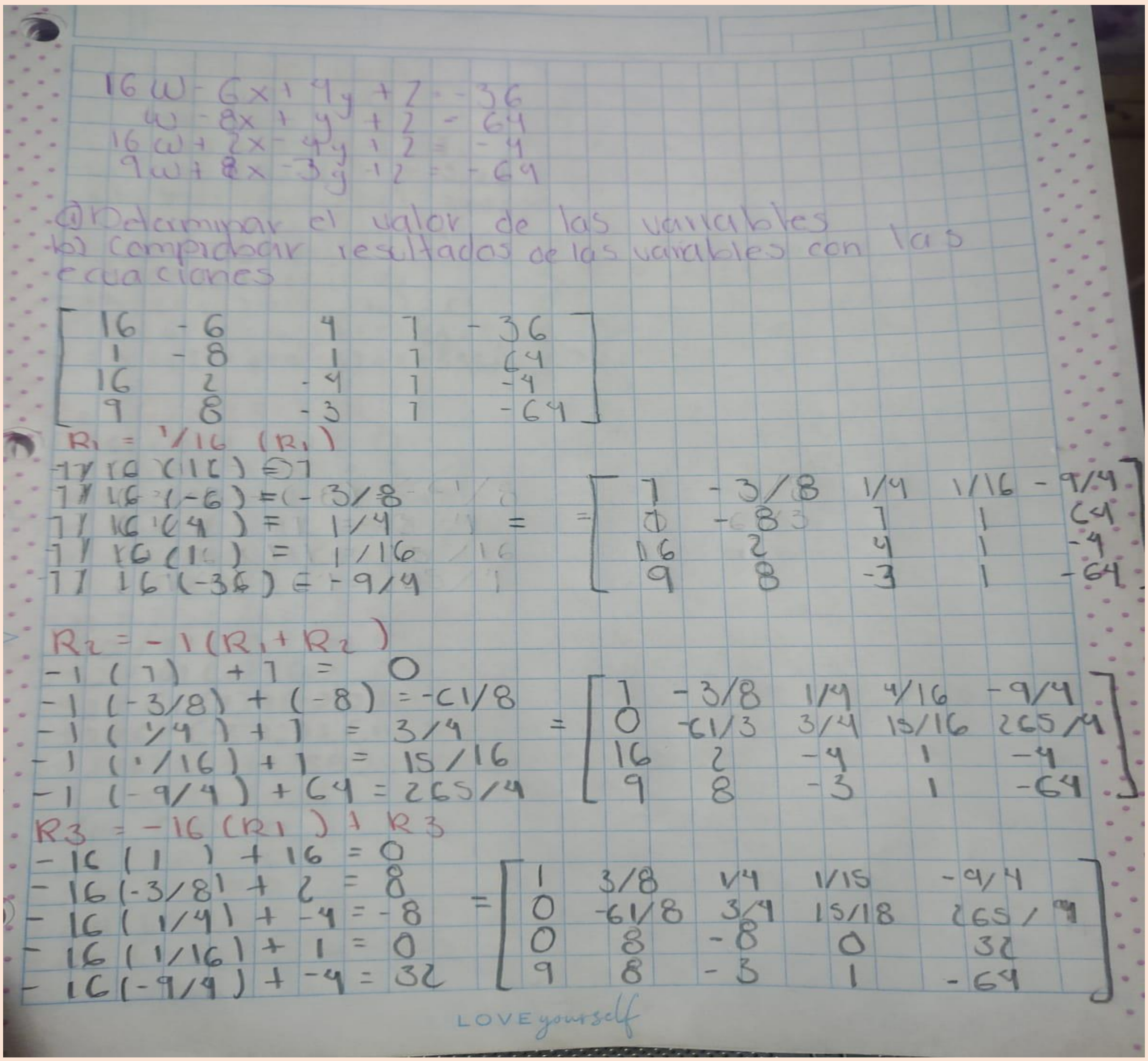
$C_{41} = -6 + 0 + 0 + 6 = 0$
$C_{42} = -6 + 0 + 0 + 6 = 0$
$C_{43} = 6 + 0 + 0 - 6 = 0$
$C_{44} = 4 + 0 + 0 - 3 = 1$

2.- Resuelva con el C el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 16w - 6x + 4y + z &= -36 \\ W - 8x + y + z &= 64 \\ 16w + 2x - 4y + z &= -4 \\ 9w + 8x - 3y + z &= -64 \end{aligned}$$

a. Determinar el valor de las variables.

b. Comprobar resultados de las variables con las ecuaciones originales.



16w - 6x + 4y + z = -36
w - 8x + y + z = 64
16w + 2x - 4y + z = -4
9w + 8x - 3y + z = -64

a) Determinar el valor de las variables
b) Comprobar resultados de las variables con las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 16 & -6 & 4 & 1 & -36 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 64 \\ 16 & 2 & -4 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & -3 & 1 & -64 \end{bmatrix}$$

$R_1 = 1/16\,(R_1)$

$1/16\,(16) = 1$
$1/16\,(-6) = -3/8$
$1/16\,(4) = 1/4$
$1/16\,(1) = 1/16$
$1/16\,(-36) = -9/4$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3/8 & 1/4 & 1/16 & -9/4 \\ 1 & -8 & 1 & 1 & 64 \\ 16 & 2 & 4 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & -3 & 1 & -64 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -1(R_1 + R_2)$

$-1\,(1) + 1 = 0$
$-1\,(-3/8) + (-8) = -61/8$
$-1\,(1/4) + 1 = 3/4$
$-1\,(1/16) + 1 = 15/16$
$-1\,(-9/4) + 64 = 265/4$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3/8 & 1/4 & 4/16 & -9/4 \\ 0 & -61/3 & 3/4 & 15/16 & 265/4 \\ 16 & 2 & -4 & 1 & -4 \\ 9 & 8 & -3 & 1 & -64 \end{bmatrix}$$

$R_3 = -16\,(R_1) + R_3$

$-16\,(1) + 16 = 0$
$-16\,(-3/8) + 2 = 8$
$-16\,(1/4) + -4 = -8$
$-16\,(1/16) + 1 = 0$
$-16\,(-9/4) + -4 = 32$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3/8 & 1/4 & 1/15 & -9/4 \\ 0 & -61/8 & 3/4 & 15/18 & 265/4 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 32 \\ 9 & 8 & -3 & 1 & -64 \end{bmatrix}$$

$R_4 = -9(R_1) + R_4$

$-9(1) + (9) = 0$
$-9(-3/8) + (8) = 91/8$
$-9(1/4) + (-3) = -21/4$
$-9(1/16) + (1) = 7/16$
$-9(-9/4) + (-64) = 175/4$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3/8 & 1/4 & 1/16 & -9/4 \\ 0 & -61/8 & 3/4 & 15/16 & 265/4 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 32 \\ 0 & 9/18 & -2/14 & 7/16 & -175/4 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -8/61 (R_2)$

$-8/61 (0) = 0$
$-8/61 (-61/8) = 1$
$-8/61 (3/4) = -6/61$
$-8/61 (15/16) = -15/122$
$-8/61 (265/4) = -530/61$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3/8 & 1/4 & 1/16 & -9/4 \\ 0 & 1 & -6/61 & -15/122 & -530/61 \\ 0 & 8 & -8 & 0 & 32 \\ 0 & 91/8 & -21/4 & 7/16 & -175/4 \end{bmatrix}$$

$R_1 = 3/8 (R_2) + R_1$

$3/8 (0) + (1) = 1$
$3/8 (1) + (-3/8) = 0$
$3/8 (-6/61) + (1/4) = 13/61$
$3/8 (-15/122) + (1/16) = 1/61$
$3/8 (-530/61) + (-9/4) = -336/61$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/16 & 1/16 & -133/61 \\ 0 & 1 & -6/61 & -13/122 & -530/61 \\ 0 & 0 & -440/61 & 60/61 & 6192/61 \\ 0 & 91/8 & -21/4 & 7/16 & -175/4 \end{bmatrix}$$

$R_4 = -91/8 (R_2) + R_4$

$-91/8 (0) + (0) = 0$
$-91/8 (1) + 91/8 = 0$
$-91/8 (-6/61) + (-21/4) = -252/61$
$-91/8 (-15/122) + 7/16 = 112/61$
$-91/8 (-530/61) + (-175/4 = 3360/61$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/16 & 1/16 & -33/61 \\ 0 & 1 & -6/61 & 151/122 & -530/61 \\ 0 & 0 & -440/61 & 60/61 & 6192/61 \\ 0 & 0 & -1250/61 & 112/61 & 3360/61 \end{bmatrix}$$

$R_3 = -61/440\ (R_3)$

$-61/440\ (0) = 0$
$-61/440\ (0) = 0$
$-61/440\ (-440/61) = 1$
$-61/440\ (60/61) = 3/22$
$-61/440\ (6192/61) = 774/55$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/61 & 1/61 & -336/61 \\ 0 & 1 & -6/61 & -15/122 & -530/61 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & -252/61 & 112/61 & 3360/61 \end{bmatrix}$$

$R_1 = -13/61\ (R_3) + R_1$

$-13/61\ (0) + (1) = 1$
$-13/61\ (0) + (0) = 0$
$-13/61\ (1) + (13/16) = 0$
$-13/61\ (-3/22) + (1/16) = 1/22$
$-13/61\ (-774/55) + (-336/61) = -138/55$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/22 & -138/55 \\ 0 & 1 & -6/61 & -15/122 & -530/61 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & -252/61 & 112/61 & 3360/61 \end{bmatrix}$$

$R_2 = 6/61\ (R_3) + R_2$

$6/61\ (0) + (0) = 0$
$6/61\ (0) + (1) = 1$
$6/61\ (1) + (-6/61) = 0$
$6/61\ (-3/22) + (-15/122) = -3/22$
$6/61\ (-774/55) + (-530/61) = -554/55$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/22 & -138/55 \\ 0 & 1 & 0 & -3/22 & -554/55 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & -252/61 & 112/61 & 3360/61 \end{bmatrix}$$

$R_4 = 252/61\ (R_3) + R_4$

$252/61\ (0) + (0)\ 0$
$252/61\ (0) + (0)\ 0$
$252/61\ (1) + (-252/61)\ 0$
$252/61\ (-3/22) + (112/61) = 14/11$
$252/61\ (-774/55) + (3360/61) = -168/55$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/22 & -138/55 \\ 0 & 1 & 0 & -3/22 & -554/55 \\ 0 & 0 & 1 & 3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & 0 & 14/11 & 163/55 \end{bmatrix}$$

$R_4 = 11/14\ (R_4)$

$11/14\ (0) = 0$
$11/14\ (0) = 0$
$11/14\ (0) = 0$
$11/14\ (14/11) = 1$
$11/14\ (-168/55) = -1215$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/22 & -138/55 \\ 0 & 1 & 0 & -3/22 & -554/55 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1215 \end{bmatrix}$$

$R_1 = -\frac{1}{22}(R_4) + R_1$

$-1/22\,(0) + 1 = 1$

$-1/22\,(0) + 0 = 0$

$-1/22\,(0) + 0 = 0$

$-1/22\,(1) + +1/22 = 0$

$-1/22\,(-12/5) + (-138/55) = -12/5$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/22 & -334/55 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -774/55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12/5 \end{bmatrix}$$

$R_2 = 3/22\,(R_4) + R_2$

$3/22\,(0) + 0 = 0$

$3/22\,(0) + 1 = 1$

$3/22\,(0) + 0 = 0$

$3/22\,(1) + (-3/22) = 0$

$3/22\,(-12/5) + (-554/55) = 52/5$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -52/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/22 & -779/55 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12/5 \end{bmatrix}$$

$R_3 = 3/22\,(R_4) + R_3$

$3/22\,(0) + 0 = 0$

$3/22\,(0) + 0 = 0$

$3/22\,(0) + 1 = 1$

$3/22\,(1) + (-3/22) = 0$

$3/22\,(-12/5) + (-774/55) = -72/5$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -12/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -52/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -72/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12/5 \end{bmatrix}$$

$w = -12/5$

$x = -52/5$

$y = -72/5$

$z = -12/5$

Comprobación

- $16(-12/5) - 6(-52/5) + 4(-72/5) + 42/5 = 36$

$-36 = -36$

- $-12/5 - 8(-52/5) + (-72/5) + (-12/5) = 64$

$64 = 64$

- $16(-12/5) + 2(-52/5) - 4(-72/5) + (-12/5) = -4$

$-4 = -4$

- $9(-12/5) + 8(-52/5) - 3(-72/5) + (-12/5) = -64$

$-64 = -64$

CONCLUSION

Con este proyecto pudimos llegar a la conclusión de que una matriz es una organización lineal de un determinado número de conjuntos o de datos que se obtienen al registrar en una tabla o que se habla en un ejercicio o ejemplo. Se puede determinar que actúan entre sí o se puede determinar que tienen una relación además la notación de cada matriz es diferente, aunque al final tiene un parecido entre sí.

La matriz es una gran ayuda para saber la relación entre varios sujetos o números además existen varios tipos de matrices, aunque en este trabajo sólo podemos dar ejemplo de dos de ellas.

En el trabajo ya mencionado se muestra el cómo se realiza cada uno de estos problemas paso a paso y prácticamente con explicación no expresada con palabras. Además, es fascinante que, aunque cambiemos los renglones de lugar se pueda dar el mismo resultado ya que son los mismos elementos, aunque como ya se ha dicho en un acomodo diferente.

En este trabajo se puede determinar varios tipos de métodos para la resolución de las matrices que se presentan se puede agregar que es complicado o más bien tedioso el estar realizando o buscando las operaciones de manera adecuada para ello entonces surge la confusión qué puede causar el mal uso o realización de estas mismas entonces surgen los errores como lo son la mala suma de signos o multiplicación de signos e incluso resultados erróneos.